

# Control geométrico de sistemas mecánicos<sup>\*</sup>

Sonia Martínez  
Mechanical and Aerospace Engineering  
University of California at San Diego  
La Jolla, California, 92093, EE.UU.

17 de septiembre de 2005

## Resumen

Este artículo ilustra de forma divulgativa cómo ciertas herramientas geométrico-diferenciales y analíticas pueden resultar muy útiles para controlar sistemas mecánicos autónomos. En primer lugar, revisamos algunos conceptos y problemas básicos de la Teoría Matemática del Control. A continuación, definimos la clase de modelos con la que trabajamos y discutimos tres posibles estrategias para definir *primitivas del movimiento* basadas en esfuerzos oscilatorios complementarios. Ilustramos la exposición con un gran número de ejemplos de robótica e ingeniería.

**English summary:** *This article illustrates in a divulgative manner how certain analytic and differential-geometric tools can be very useful for the control of autonomous mechanical systems. First, we revise some basic concepts and problems from Mathematical Control Theory. Then, we define three possible control strategies based on complementary oscillatory forcing to define motion primitives. We illustrate the exposition with numerous engineering and robotic examples.*

## 1. Sistemas mecánicos y robóticos

Se puede decir que hoy disponemos en gran variedad de ambientes de toda clase de sistemas —desde satélites en el espacio hasta sumergibles en el océano— que operan con niveles de autonomía cada vez mayores (ver las fotografías de la Figura 1). Como

---

<sup>\*</sup>Parte de este trabajo fue reconocido mediante el premio al *Best Student Paper Award* de la conferencia internacional *Institute of Electrical and Electronic Engineers (IEEE) Conference on Decision and Control*, Las Vegas, Nevada, 2002, y se recoge en la tesis [22] y en el libro [5].

sabemos, el funcionamiento correcto de estos sistemas se basa en la selección y ejecución de algoritmos que les permiten realizar sus tareas y adaptarse a las condiciones imprevistas de su entorno. En particular, todo sistema que requiera algún tipo de movilidad precisa resolver el problema fundamental del *control de sus movimientos*.

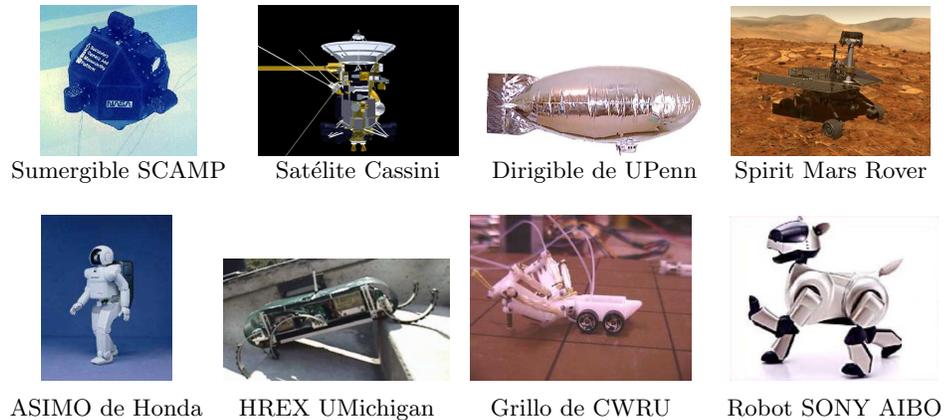


Figura 1: Vehículos autónomos y robots *biomiméticos*

Por esta razón, uno de los temas importantes en robótica es el diseño de mecanismos novedosos de locomoción, tanto físicos como de software, que permitan la fabricación de prototipos más ágiles y hábiles. Así por ejemplo, se han desarrollado múltiples variaciones de herramientas básicas como la rueda. En el *Spirit*, el rover enviado a Marte por la NASA en el 2004, cada rueda posee un motor individual para lograr mayor versatilidad sobre terrenos rugosos [29]. Otra alternativa viene dada por los robots “con patas” (ver las fotografías de la línea inferior en la Figura 1), que estarían mejor adaptados a suelos con escaleras y hoyos. Esta solución está claramente inspirada en la naturaleza y es parte de un esfuerzo más amplio por reproducir toda una clase de sistemas “biomiméticos” o “biomorfos”. La motivación tras esta línea de investigación va desde la búsqueda de nuevas formas de locomoción, pasando por la posible explotación comercial (robots de entretenimiento), hasta su utilización como herramienta para entender y reproducir el funcionamiento de los seres vivos (lo que se ha dado en llamar “integrative biology” [28]). En cualquier caso, la fabricación del robot es uno de los pasos necesarios para la realización de un sistema autónomo. Otro aspecto fundamental es el desarrollo de los algoritmos que nos permitan obtener el máximo partido de la tecnología disponible.

Una tendencia generalizada en la búsqueda de algoritmos para el control de movimientos de un robot es la definición de métodos ad hoc muy eficientes para un sistema robótico concreto, pero que no pueden extrapolarse a otros sistemas similares. A pesar de esto, se puede observar que gran número de prototipos poseen características comunes que hacen posible su tratamiento de forma unificada. A lo largo de este artículo mostraremos algunos ejemplos de algoritmos válidos para una amplia clase de sistemas

y que hacen un uso extensivo de la estructura matemática de sus modelos. Estos algoritmos servirán para definir *primitivas del movimiento*, es decir, movimientos sencillos que pueden combinarse en un comportamiento global de sistema. El control de los

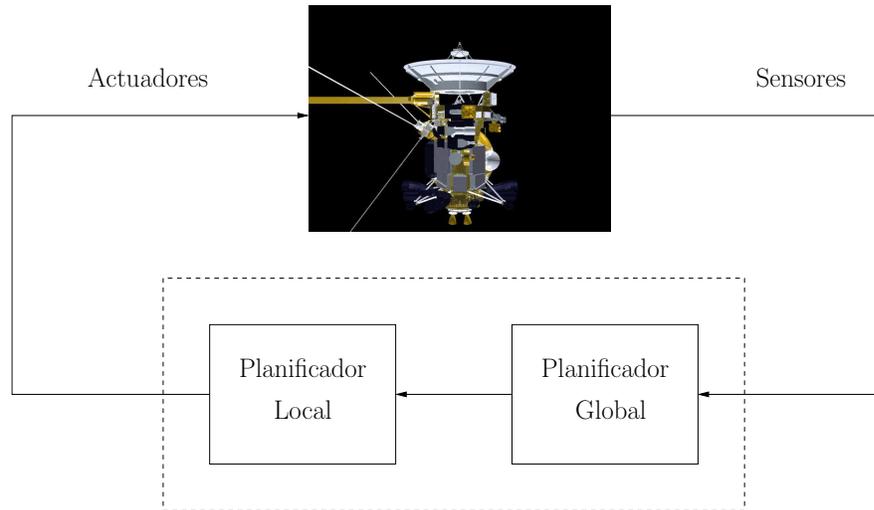


Figura 2: Sistema moderno de control

sistemas robóticos mediante primitivas se emplea en gran número de prototipos y se conoce como *control de bajo nivel* de un *sistema embebido*. Tal y como se ilustra en la Figura 2, el Planificador Global o *control de alto nivel* del sistema autónomo es el encargado de elegir la combinación adecuada de primitivas que el Planificador Local o *control de bajo nivel* genera en respuesta a las condiciones externas del sistema. Esto da lugar a un control por realimentación o por “feedback”, garantizando robustez frente a perturbaciones externas. Las características deseables de las primitivas son: que sean a su vez robustas, implementables en tiempo real y poco costosas desde el punto de vista computacional y sensorial<sup>1</sup>. En este sentido, el tipo de algoritmos que presentamos aquí son aplicables a sistemas con un número limitado de medios de acción o “actuadores” y, por tanto, no tan costosos desde el punto de vista del hardware. Como consecuencia, nuestras primitivas pueden ser útiles en la definición de mecanismos de seguridad para sistemas en los que puedan fallar algunos de sus actuadores.

<sup>1</sup>En otras palabras, primitivas que necesitan de pocos datos y cálculos.

## 2. Poniendo el sistema bajo control

En esta sección formulamos en un contexto matemático algunas de las nociones básicas relacionadas con el control de un sistema, que denotaremos por  $\Sigma$ . Muchos de los sistemas robóticos de la sección anterior pueden modelarse mediante una ecuación diferencial ordinaria afín en los controles de la forma:

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{k=1}^m g_k(x)u_k, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u_k \in U \subseteq \mathbb{R}, \quad k \in \{1, \dots, m\}. \quad (1)$$

Aquí,  $x \in \mathbb{R}^n$  representa los posibles *estados* del sistema —cuya evolución describe el comportamiento de  $\Sigma$  completamente,  $f(x)$  es el llamado *campo vectorial de deriva*<sup>2</sup> y  $g_k(x)$  son los *campos vectoriales de control* que modulamos mediante la especificación de los *controles* o *inputs*  $u_k \in U \subseteq \mathbb{R}$ ,  $k \in \{1, \dots, m\}$ . Como en todo sistema de control, se han de considerar adicionalmente las *salidas* o *outputs*  $y = h(x)$ , que representan las mediciones que podemos tomar sobre los estados del sistema. En lo que sigue, asumiremos implícitamente que  $y = (x, \dot{x})^T$ . Es decir, asumimos un sistema de control básico en el que ignoramos por simplicidad otros aspectos como la incertidumbre debida a dinámicas no modeladas y perturbaciones externas.

Algunas de las preguntas fundamentales relacionadas con el control de un sistema como el anterior son las siguientes:

*Controlabilidad.* Dada cierta condición inicial,  $x_0$ , ¿hasta qué punto es el sistema controlable? y, ¿puede modificarse sustancialmente el comportamiento de las soluciones variando  $u = (u_1, \dots, u_m)$ ? Si disponemos de “suficientes” controles  $u \in U^m$  como para alcanzar a todo un conjunto de estados que contiene a  $x_0$  en su interior, entonces decimos que el sistema es (*localmente*) *controlable en  $x_0$* .

*Estabilización Asintótica.* Si el sistema es controlable en un punto de equilibrio  $x_1$ <sup>3</sup>, ¿existe  $u$  que haga de  $x_1$  un punto de equilibrio asintóticamente estable? Dicho de otra manera, querríamos encontrar  $u = \alpha(t, x)$  que regularice la solución correspondiente  $x(t)$  asintóticamente. Es decir,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_1$ .

*Planificación de trayectorias.* El problema del control de movimientos de un sistema robótico se formula muchas veces como un problema de planificación de trayectorias en el espacio de estados  $x \in \mathbb{R}^n$ . Así, se buscan los inputs  $u$  que generan una trayectoria que pasa por determinados  $x_0, x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n$ , para evitar un posible obstáculo o región prohibida en  $\mathbb{R}^n$ .

---

<sup>2</sup>Un campo vectorial  $X$  puede identificarse localmente como una función  $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . En adelante usaremos la notación  $X = (X^1, \dots, X^n)$ , con  $X^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

<sup>3</sup> $x_1$  es punto de equilibrio para (1) si  $f(x_1) = 0$ .

*Seguimiento de trayectorias o “caminos”*. Un caso límite de la situación anterior consiste en planificar movimientos del sistema para que éste siga exactamente una trayectoria deseada  $x_d(t)$  en el espacio de estados.

Una de las dificultades principales para encontrar solución a estas cuestiones viene dada por la presencia de la deriva  $f(x)$ . De hecho, muchas de las técnicas de control desarrolladas hasta la fecha son aplicables sólo para sistemas sin deriva, es decir,  $f(x) \equiv 0$ . Por ejemplo, éste es el caso del carrito con dos ruedas representado en la Figura 3 (vista en planta). Este sistema puede describirse completamente mediante su posición  $(a, b)$  en el plano, su orientación  $\theta$  respecto de un sistema de referencia OXY, y las velocidades  $(\dot{a}, \dot{b}, \dot{\theta})$ . Así, el conjunto de tuplas  $x = (a, b, \theta, \dot{a}, \dot{b}, \dot{\theta})$  puede tomarse como espacio de estados asociado al sistema<sup>4</sup>. Supongamos que el control del carrito se puede realizar mediante dos tipos de fuerzas: una que permite moverlo hacia delante o hacia atrás y un par de fuerzas sobre el centro de masas<sup>5</sup> que modifica su orientación. Con estos inputs, podemos detectar que nuestro sistema tiene deriva nula porque si no aplicamos ninguna fuerza sobre el carrito; es decir, si nuestros inputs son cero, el sistema no se mueve. A pesar de esto, no es completamente obvio como realizar el control del

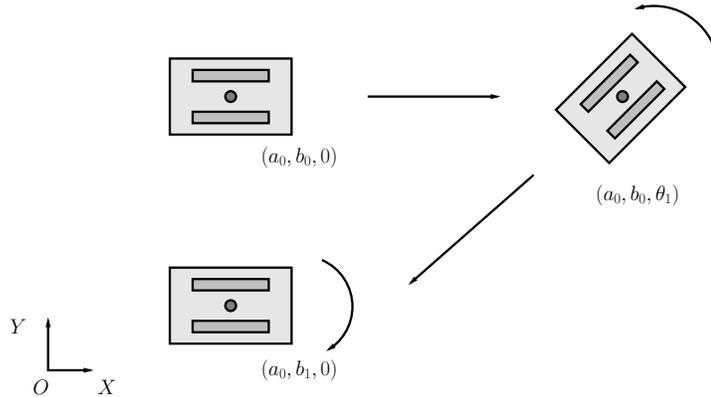


Figura 3: Vista en planta de un carrito con dos ruedas

sistema. Por ejemplo, para aparcarlo en paralelo empezando desde  $(a_0, b_0, 0)$  hasta una configuración  $(a_0, b_1, 0)$  con  $b_1 < b_0$  (ver la Figura 3) es necesario aplicar una secuencia de inputs o “gait” como la siguiente: mover hacia adelante, girar a la izquierda, mover hacia atrás y girar hacia la derecha. Un campo vectorial cuyas curvas integrales generan este movimiento es el dado por el corchete de Lie [39],  $[g_1, g_2]$ , de los campos vectoriales de control  $g_1 = (g_1^1, \dots, g_1^n) \equiv \sum_{i=1}^n g_1^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  y  $g_2 = (g_2^1, \dots, g_2^n) \equiv \sum_{j=1}^n g_2^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ . Estos campos corresponden respectivamente, a la fuerza de empuje hacia delante y al par de fuerzas. El corchete de Lie es una herramienta fundamental para caracterizar la

<sup>4</sup>En la siguiente sección daremos una definición más precisa.

<sup>5</sup>representado mediante un círculo en la figura del carrito.

controlabilidad del sistema y, para  $g_1, g_2$ , está definido (localmente) como

$$[g_1, g_2]^j = \sum_{i=1}^n g_1^i \frac{\partial g_2^j}{\partial x^i} - g_2^i \frac{\partial g_1^j}{\partial x^i}, \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

Por otro lado, los modelos disponibles para muchos sistemas tienen derivada no nula. Este es el caso de la anguila robótica y del juguete llamado “roller racer”, una especie de triciclo sin pedales comercializado en los EE.UU. (ver la Figura 4). En la anguila, los campos vectoriales de control están definidos mediante pares de fuerzas ejercidos en las articulaciones del robot a través de pequeños motores. Por otro lado, una niña sentada en el *roller racer* con los pies apoyados en los manillares puede hacer que el juguete coja impulso hacia delante girando el manillar hacia derecha e izquierda.

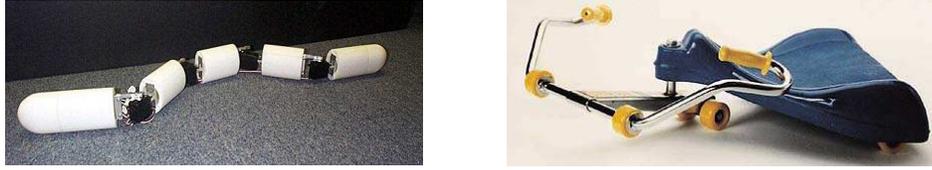


Figura 4: Anguila Robotica de UPenn y el juguete “roller racer”.

Las fuerzas de fricción de la anguila en el agua y las fuerzas de ligadura que hacen que las ruedas del *roller racer* no deslicen al rodar, hacen posible que estos sistemas se muevan hacia delante mediante un control tan limitado. Por la misma razón, si ponemos  $u \equiv 0$  una vez que los sistemas están en movimiento, se puede observar que éstos no se detienen. Este efecto indica la presencia de una derivada no nula,  $f(x)$ , que juega un papel dual. Por un lado, ésta permite que los sistemas ganen velocidad aplicando  $u \in \mathbb{R}^m$  con  $u$  pequeño y  $m < n$ ; por otro lado, su presencia dificulta el control del sistema para, por ejemplo, detenerlo en la posición deseada. Es fundamental, por tanto, entender la interacción entre derivada y campos vectoriales de control para diseñar los *gaits* o secuencias de inputs que permitan controlar la locomoción del sistema. En las secciones que siguen, estudiamos esta relación trazando un paralelismo entre los sistemas no lineales como (1) y los *sistemas lineales de control*:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}. \quad (2)$$

Para estos últimos podemos responder a las preguntas formuladas anteriormente estudiando el operador dependiente del tiempo:

$$\Phi_t : u \mapsto \Phi_t[u] \triangleq \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau.$$

Las soluciones asociadas a  $u$  con condición inicial  $x_0 = 0$  pueden obtenerse para (2) como  $x(t) = \Phi_t[u(\tau)]$ . Se puede probar que el sistema es controlable en  $x_0$  si y solo si

$\text{Im } \Phi_t$  tiene rango máximo. En caso afirmativo, es fácil encontrar los controles que hacen que el sistema alcance un estado  $x_{\text{final}}$  en el instante  $t$  como  $u = \Phi_t^+[x_{\text{final}}]$ , donde  $\Phi_t^+$  es el operador inverso de  $\Phi_t$  (ver [13]). Es decir, *se puede invertir* la aplicación input-output  $u \mapsto x$  y podemos determinar las respuestas a los problemas planteados anteriormente.

Para la clase general de los sistemas no lineales (1), incluso con deriva nula, es prácticamente imposible conseguir un resultado similar. Es decir, descripciones explícitas y directas de la aplicación del espacio de inputs al de trayectorias y su inversa. Es por esto que nos vemos obligados a estudiar clases de sistemas particulares, con la esperanza de que la estructura especial de dicha clase nos ayude a encontrar soluciones a las preguntas planteadas. En concreto, aquí mostraremos tres tipos de controles oscilatorios que nos conducirán a una inversión análoga a la de los sistemas lineales para una clase amplia de sistemas mecánicos:

1. **Oscilaciones de amplitud pequeña.** Mediante este tipo de oscilación se comunica al sistema mecánico una velocidad pequeña que hace posible despreciar los efectos de los inputs a órdenes mayores.
2. **Oscilaciones de frecuencia y amplitud grande.** Contrariamente a los anteriores, estos inputs son de gran intensidad y el movimiento del sistema puede controlarse *en media*.
3. **Oscilaciones (subóptimas) de magnitud intermedia.** La tercera opción nos lleva a un tercer tipo de oscilación con un orden de magnitud intermedio entre las de los apartados anteriores. Para obtenerlas nos basamos en una aproximación de un problema de control óptimo definido para el sistema mecánico.

Principalmente describiremos los dos primeros métodos y trataremos brevemente el último, señalando algunos resultados en el sistema robótico de la anguila. Referimos a los lectores interesados en más detalles a [9, 27]. Como veremos, los métodos utilizados descansan principalmente en áreas clásicas como la Mecánica Geométrica, la Teoría de Sistemas Dinámicos y la Teoría Matemática del Control. Esta exposición pretende así constatar cómo las herramientas matemáticas pueden ser útiles en la concepción y el desarrollo de nuevas tecnologías, como es el caso del diseño de prototipos robóticos.

### 3. Modelos de sistemas mecánicos

La clase de sistemas mecánicos que presentamos aquí tiene la suficiente generalidad como para modelar de forma unificada gran variedad de robots y vehículos autónomos y al mismo tiempo poseer una estructura suficientemente rica como para facilitar el

análisis de controlabilidad. Para las definiciones de conceptos básicos de geometría diferencial y mecánica geométrica que se utilizan a continuación ver [12, 31, 39] y, para un tratamiento completo de este tema y otros aspectos de la Teoría Geométrica del Control y el control de movimientos de los sistemas mecánicos, recomendamos ver [5, 17, 26, 30].

**Definición 3.1** Un *sistema mecánico de control*  $(\mathbb{Q}, \mathbb{M}, V, F_{\text{dis}}, \mathcal{D}, \mathcal{F})$  es una tupla que consta de los siguientes elementos:

- un espacio de configuraciones dado por una variedad diferenciable de dimensión  $n$ ,  $\mathbb{Q}$ . Por ejemplo,  $\mathbb{Q} = \mathbb{R}^n$  u otro espacio no lineal, como una esfera  $\mathbb{Q} = \mathbb{S}^2$  o un grupo de Lie  $\mathbb{Q} = SO(3)$ . El espacio de estados del sistema de control está dado por la variedad tangente  $T\mathbb{Q}$ .<sup>6</sup> La dimensión  $n$  de la variedad  $\mathbb{Q}$ , son *los grados de libertad* del sistema,
- una métrica riemanniana  $\mathbb{M}$ , que codifica el tensor de inercia del sistema y define su energía cinética  $KE(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\mathbb{M}(q, \dot{q})$ ,
- una función real  $V : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ , que define la energía potencial del sistema,
- fuerzas de disipación  $F_{\text{dis}} : T\mathbb{Q} \rightarrow T^*\mathbb{Q}$ , dadas por un tensor 1-1, modelando disipaciones de tipo Rayleigh,
- una *distribución de ligaduras*,  $\mathcal{D} : \mathbb{Q} \rightarrow T\mathbb{Q}$ , tal que para todo  $q \in \mathbb{Q}$  el espacio  $\mathcal{D}(q) \subseteq T_q\mathbb{Q}$  es un subespacio lineal al que pertenecen las velocidades permitidas del sistema,
- una *codistribución de control*  $m$ -dimensional,  $\mathcal{F} : \mathbb{Q} \rightarrow T^*\mathbb{Q}$ , tal que para todo  $q \in \mathbb{Q}$  el espacio  $\mathcal{F}(q)$  es un subespacio lineal de  $T_q^*\mathbb{Q}$ . Si  $\mathcal{F}$  están generados por  $\{F_1, \dots, F_m\}$ , entonces los campos vectoriales de control están dados por  $\{\mathbb{M}^{-1}F_1, \dots, \mathbb{M}^{-1}F_m\}$ .

**Ejemplo 3.2 (Dirigible I)** Un dirigible como el de la Figura 5 (utilizado normalmente para uso publicitario en espacios cerrados) podría modelarse como sigue. Suponiendo que la fuerza de gravedad se compensa con la fuerza ejercida hacia arriba a causa del gas contenido en la bolsa del dirigible, podemos modelar nuestro sistema como un cuerpo rígido plano representando una sección horizontal del dirigible (esquema de la Figura 5). El dirigible está controlado mediante la fuerza de empuje de un motor colocado en la cola del globo (a una distancia  $h$  del centro de masas) y un par de fuerzas que orienta el motor hacia cualquier ángulo. Los elementos de este modelo son los siguientes:

---

<sup>6</sup>Como conjunto,  $T\mathbb{Q} = \cup_{q \in \mathbb{Q}} T_q\mathbb{Q}$ . Si  $\dim \mathbb{Q} = n$ , entonces  $T_q\mathbb{Q}$ , el espacio tangente a  $\mathbb{Q}$  en  $q$ , puede visualizarse como  $\mathbb{R}^n$ , para cada  $q \in \mathbb{Q}$ . Una situación parecida ocurre con el espacio cotangente  $T^*\mathbb{Q}$ .

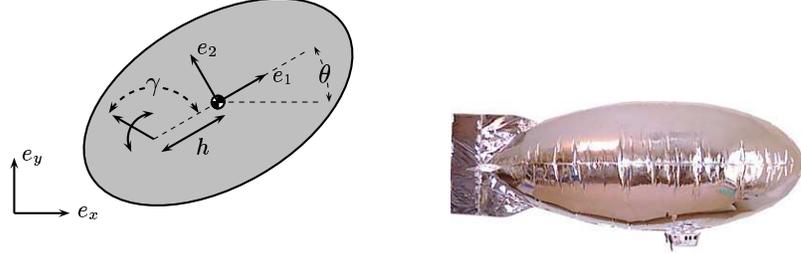


Figura 5: Dirigible autónomo y su modelo mediante un cuerpo rígido plano.

- la configuración del sistema está dada por  $q = (x, y, \theta, \gamma) \in \text{SE}(2) \times \mathbb{S}^1$ . Es decir,  $(x, y, \theta) \in \text{SE}(2)$  representa la posición y orientación del sistema en el plano, y  $\gamma \in \mathbb{S}^1$  es el ángulo que forma la fuerza de empuje con el eje  $e_1$  del sistema de referencia en el cuerpo rígido,
- suponiendo que el motor tiene masa despreciable en comparación con el sistema del globo, la métrica riemanniana es la métrica que nos da la energía cinética que localmente se expresa como

$$(\mathbb{M}_{ij}) = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 + J_2 & J_2 \\ 0 & 0 & J_2 & J_2 \end{bmatrix},$$

donde  $m$  es la masa total del dirigible,  $J_1$  la inercia del cuerpo rígido y  $J_2$  la inercia del motor,

- ya que la fuerza de gravedad está compensada por el empuje del gas, podemos tomar  $V \equiv 0$ ,
- si asumimos que las velocidades del sistema son pequeñas, podemos tomar también  $F_{\text{dis}} \equiv 0$ ,
- tampoco hay ligaduras en las velocidades que el dirigible alcanza,
- la expresión de la fuerzas que generan la codistribución de control son las siguientes:

$$F_1 = \cos(\theta + \gamma)dx + \sin(\gamma + \theta)dy - hd\theta, \quad F_2 = d\gamma.$$

donde  $F_1$  es la fuerza de empuje del motor y  $F_2$  es el par de fuerzas que hace cambiar la orientación de la fuerza de empuje.

Se pueden distinguir dos tipos de sistemas de control mecánicos dependiendo del número de inputs independientes que podemos hacer actuar sobre él. Si  $\mathcal{F}$  está generada por  $\{F_1, \dots, F_m\}$ , una base de 1-formas linealmente independientes y  $\dim \mathbb{Q} = n$ , entonces:

- si  $m = n$ , se dice que el sistema está *completamente actuado* (en caso de  $m \geq n$ , entonces existe una *sobreactuación*),
- si  $m \leq n$ , entonces se dice que el sistema está *infractuado*.

Por ejemplo, el dirigible del Ejemplo 3.2 es un sistema infractuado con  $m = 2 < 3 = n$ . Claramente, en el caso completamente actuado podemos afectar directamente todos los grados de libertad de un sistema, mientras que en el caso infractuado el control es más complicado.

A partir de los elementos que definen el sistema, su evolución está regida por las ecuaciones<sup>7</sup>:

$$\nabla_{\dot{q}} \dot{q} = Y_0(q) + R(q)\dot{q} + \sum_{k=1}^m Y_k(q)u_k, \quad (q(0), \dot{q}(0)) = (q_0, \dot{q}_0).$$

El objeto  $\nabla$  es la llamada *conexión afín* asociada a la métrica riemanniana  $\mathbb{M}$  y la distribución de ligaduras  $\mathcal{D}$  [5, 19, 39]. En términos sencillos, se puede decir que  $\nabla_{\dot{q}} \dot{q}$  define la *aceleración geodésica* del sistema. Los campos vectoriales  $Y_a$  son los *campos vectoriales de control* que se obtienen a partir de las 1-formas  $F_a$  y el proyector  $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$  dado a partir de las ligaduras  $\mathcal{D}$ ,  $Y_a = \mathcal{P}_{\mathcal{D}}(\mathbb{M}^{-1}F_a)$ . De manera análoga,  $Y_0$  se corresponde con la energía potencial y contribuye al campo vectorial de deriva en la ecuación de control. Finalmente,  $R$  es el tensor de disipación definido a partir de  $F_{\text{dis}}$ .

En coordenadas locales, las ecuaciones pueden reescribirse en la forma:

$$\ddot{q}^\ell + \Gamma_{ij}^\ell(q)\dot{q}^i\dot{q}^j = Y_0^\ell(q) + R_i^\ell(q)\dot{q}^i + \sum_{k=1}^m Y_k^\ell(q)u_k, \quad (q(0), \dot{q}(0)) = (q_0, \dot{q}_0),$$

donde  $\ell \in \{1, \dots, n\}$ . Esta ecuación puede expresarse como en (1) reescribiendo la ecuación de segundo orden como una de primer orden en la forma usual tomando  $x = (q, \dot{q})$ , e identificando  $f(x) = Y_0(q) + R(q)\dot{q}$  y  $g_k(x) = Y_k(x)$ ,  $k \in \{1, \dots, m\}$ . En la siguiente sección veremos como la forma de las ecuaciones del sistema y los objetos geométricos que hemos identificado para definirlos (por ejemplo  $\nabla$ ) juegan un papel esencial en el análisis de controlabilidad.

---

<sup>7</sup>ecuaciones de Euler-Lagrange si el sistema no posee ligaduras o de Lagrange-d'Alembert si hay ligaduras presentes.

### 3.1. Sistemas mecánicos con simetría

A continuación introducimos el concepto de sistema mecánico de control con simetría, al que prestaremos especial atención en lo que sigue. Para un desarrollo más completo de sistemas mecánicos con simetría y de lo expuesto a continuación ver [2, 5, 10]. Un sistema mecánico posee simetrías cuando las ecuaciones que lo describen quedan invariantes bajo la acción de un grupo. La existencia de simetrías permite obtener un sistema de ecuaciones simplificado y obtener definiciones de controlabilidad menos restrictivas.

**Definición 3.3** Se dice que  $(\mathbb{Q}, \mathbb{M}, V, F_{\text{dis}}, \mathcal{D}, \mathcal{F})$  es un *sistema mecánico de control con simetría* si existe una acción de un grupo de Lie  $\mathbb{G}$  sobre  $\mathbb{Q}$  libre y propia [39]

$$\Psi : \mathbb{G} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q},$$

que deja los elementos del sistema mecánico invariantes. Es decir,  $\mathbb{Q}$  es un *fibrado principal* tal que

$$\begin{aligned} \Psi_g^* \mathbb{M} &= \mathbb{M}, & \Psi_g^* V &= V, & \Psi_g^* F_{\text{dis}} &= F_{\text{dis}} \\ \Psi_g^* \mathcal{D} &= \mathcal{D}, & \Psi_g^* F_a &= F_a, & F_a \in \mathcal{F}, & 1 \leq a \leq m, \quad g \in \mathbb{G}. \end{aligned}$$

Esta definición implica en particular que localmente podemos escribir  $\mathbb{Q} \approx \mathbb{G} \times \mathbb{M}$  y cada configuración como  $q \approx (g, r)$ . Usualmente,  $g \in \mathbb{G}$  se corresponde con la posición y orientación del sistema en el espacio y  $\mathbb{G}$  es un subgrupo del grupo de rotaciones y traslaciones en el espacio,  $\text{SE}(3)$ , como por ejemplo  $\text{SE}(2)$ ,  $\text{SO}(3)$ , etc. Por otro lado,  $r \in \mathbb{M}$  representa una configuración interna del sistema. De esta manera, identificaremos a  $\mathbb{G}$  como el *espacio de poses* (por posición y orientación) y a  $\mathbb{M}$  como el *espacio de formas*.

**Ejemplo 3.4 (Anguila robótica)** La anguila robótica de la Figura 4 (izquierda) fue construida en el GRASP Laboratory de la Universidad de Pennsylvania para estudiar algoritmos de locomoción en sistemas infractuados. Los eslabones, todos con la misma masa, pueden flotar en el agua y las articulaciones constan de pequeños motores recubiertos por goma impermeable. La anguila robótica puede caracterizarse como un sistema mecánico con simetría bajo las siguientes consideraciones. Suponiendo que la anguila nada flotando sobre la superficie en un fluido, podemos modelarla como el cuerpo rígido de la Figura 6. De esta manera,  $\mathbb{Q}$  es un fibrado principal dado por el producto cartesiano  $\mathbb{Q} = \text{SE}(2) \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ . Una configuración  $q \in \mathbb{Q}$  tiene por tanto dos componentes: la posición y orientación del eslabón central  $(x, y, \theta) \in \text{SE}(2)$  en el espacio de poses y la forma interna de la anguila  $(\phi_1, \phi_2, \phi_4, \phi_5) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ . Dado que la anguila nada en un medio homogéneo y los pares de fuerzas de las articulaciones también son independientes de la posición y orientación de la anguila en el plano, se

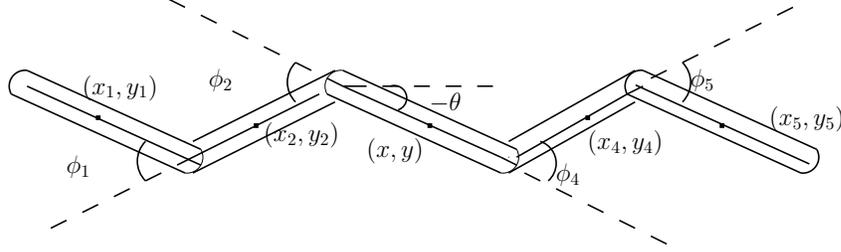


Figura 6: Modelo plano de la anguila de la Figura 4.

puede deducir que  $SE(2)$  es el grupo de Lie correspondiente a este sistema mecánico con simetría. A continuación definimos los elementos que dan lugar al modelo del sistema mecánico de la anguila. Para una derivación completa remitimos al lector a [9].

La energía cinética de nuestro modelo se obtiene como:

$$KE = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J \sum_{i \neq 3} \left( \sum_{j=h(i)}^i \dot{\phi}_j + \dot{\theta} \right)^2 + \frac{1}{2}m \sum_{i \neq 3} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2),$$

donde  $(x_i, y_i)$  denota el centro del eslabón  $i$ -ésimo

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + d \operatorname{sg}(i) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + d \operatorname{sg}(i) \sum_{k=h(i)}^i f(i, k) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix},$$

con  $d$  la mitad de la longitud de un eslabón y las funciones  $\operatorname{sg}$ ,  $f$  y  $h$  están definidas por

$$\operatorname{sg}(i) = \begin{cases} -1 & \text{si } i < 3 \\ 1 & \text{si } i > 3 \end{cases}, \quad f(i, k) = \begin{cases} 2 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}, \quad h(i) = \begin{cases} 2 & \text{si } i < 3 \\ 4 & \text{si } i > 3 \end{cases}.$$

Si asumimos que la fuerza de flotación en el agua compensa la gravedad, se toma la aproximación  $V \equiv 0$ . Por otro lado, también en este caso no hay restricciones en las velocidades que puedan tomar los eslabones<sup>8</sup>. Las componentes paralela y perpendicular de las fuerzas de rozamiento de la anguila en el agua se aproximan mediante

$$F_i^{\parallel} = -\mu_w^{\parallel} v_i^{\parallel}, \quad F_i^{\perp} = -\mu_w^{\perp} v_i^{\perp},$$

para ciertos coeficientes  $\mu_w^{\parallel}$ ,  $-\mu_w^{\perp}$  de rozamiento de los eslabones en el agua que dependen del área efectiva del eslabón, su forma y la densidad del agua. Por otro lado,  $v_i^{\parallel}$ ,

<sup>8</sup>En realidad esto no ocurre en el sistema real físico del robot, pero se toma esta aproximación por simplicidad. Tras derivar las soluciones aproximadas después, se han de tomar aquellas que satisfacen las restricciones adecuadas.

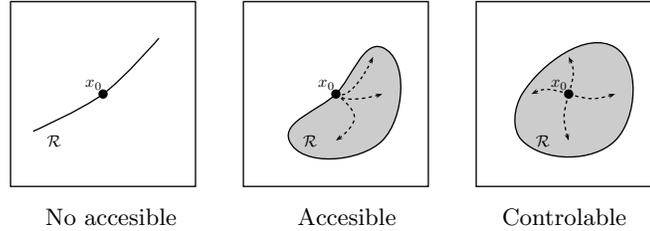
$v_i^\perp$  son las proyecciones del vector  $(\dot{x}_i, \dot{y}_i)$  en las direcciones paralela y perpendicular a cada eslabón, respectivamente. Mediante una serie de manipulaciones, estas fuerzas pueden expresarse como un tensor de disipación paralelo y perpendicular a cada eslabón,  $R^\parallel(q)\dot{q}$  y  $R^\perp(q)\dot{q}$ . Finalmente, los inputs de control  $\dot{\phi}_i = u_i$  se derivan a partir de los pares de fuerzas  $w_i = \ddot{\phi}_i$ , como  $\int w_i = u_i$ .

## 4. Cómo saber si el sistema es controlable

Intuitivamente, la controlabilidad local se corresponde con la idea de que, empezando en un punto, nos podemos mover en cualquier dirección en el espacio de estados. La definición de controlabilidad para un sistema  $\Sigma$  dado por  $\dot{x} = f(x) + \sum_{k=1}^m u_k g_k(x)$ , puede establecerse en términos matemáticos como sigue. Supongamos que  $\mathbf{N}$  es el espacio de estados y los campos vectoriales  $f, g_1, \dots, g_m$  son analíticos en  $\mathbf{N}$ . Sea  $U$  un entorno de  $x_0$  en  $\mathbf{N}$  y definamos el conjunto:

$$\mathcal{R}_\mathbf{N}^U(x_0, T) = \bigcup_{0 \leq \tau \leq T} \left\{ x_1 \in \mathbf{N} \mid \exists \text{ una solución de } \Sigma \text{ t.q. para algún } \tau \leq T, \right. \\ \left. x(0) = x_0, x(\tau) = x_1, \text{ y } x(t) \in U, \forall t \in [0, \tau] \right\}.$$

La controlabilidad de  $\Sigma$  en  $x_0$  depende de a cuál de las siguientes categorías cualitativas pertenece el conjunto  $\mathcal{R}_\mathbf{N}^U(x_0, T)$ , para  $T > 0$  pequeño:



Así, se dice que  $\Sigma$  es localmente accesible en  $x_0$  si existen  $T > 0$  pequeño y  $U \subseteq \mathbf{N}$  entorno de  $x_0$  tal que  $\mathcal{R}_\mathbf{N}^U(x_0, t)$  tiene interior no vacío. Si además  $x_0$  está en el interior de  $\mathcal{R}_\mathbf{N}^{U_1}(x_0, t)$ , para todo  $t \leq T$ ,  $\forall U_1 \subseteq U$  abierto, entonces  $\Sigma$  es localmente controlable en  $x_0$ .

En el caso particular de los sistemas mecánicos de control las nociones anteriores se toman con respecto a  $\mathbf{N} = \mathbf{TQ}$ , por ser el espacio de estados. Sin embargo, para estos sistemas existen nociones especiales de controlabilidad local (resp. de accesibilidad local) menos restrictivas. Quizás nos baste con saber si podemos conducir el sistema desde una configuración inicial  $q_0$  con velocidad inicial  $0_{q_0}$  hasta cierto  $q_1$  con velocidad final  $0_{q_1}$ . Esta noción es la que se conoce como *controlabilidad en las configuraciones*, definida de forma análoga a la controlabilidad local pero tomando  $\mathbf{N} = \mathbf{Q}$  en la definición

del conjunto  $\mathcal{R}$ . Más aún, para un sistema mecánico con simetría como la anguila, podría interesarnos únicamente la controlabilidad *en las variables del grupo*  $\mathbf{G}$  (que, como decíamos, corresponden a la posición y la orientación en el espacio del sistema) sin importarnos lo que ocurra en las variables de forma. Más formalmente se tiene la siguiente definición.

**Definición 4.1** Sea  $\Sigma$  un sistema mecánico de control con simetría definido sobre  $\mathbf{Q} = \mathbf{G} \times \mathbf{M}$  y sea  $\pi : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{G}$  la proyección canónica. Se dice que  $\Sigma$  es *localmente controlable en las variables de grupo* en  $q_0$  si existen  $T > 0$  y  $U \subseteq \mathbf{Q}$  abierto tal que para todo  $\bar{U} \subseteq U$  entorno de  $q_0$  y  $0 \leq t \leq T$ , el conjunto  $\mathcal{R}_{\bar{U}}^{\bar{U}}(q_0, t)$  contiene un abierto de  $\mathbf{Q}$ ,  $\tilde{U}$ , al que  $q_0$  pertenece y cuya proyección a  $\mathbf{G}$ ,  $\pi(\tilde{U})$ , es un abierto (respectivamente,  $\Sigma$  es *localmente accesible en las variables de grupo* en  $q_0$  si existen  $T > 0$  y  $U \subseteq \mathbf{Q}$  abierto tal que para todo  $\bar{U} \subseteq U$  entorno de  $q_0$  y  $0 \leq t \leq T$ , el conjunto  $\mathcal{R}_{\bar{U}}^{\bar{U}}(q_0, t)$  contiene un abierto de  $\mathbf{Q}$ ,  $\tilde{U}$ , cuya proyección a  $\mathbf{G}$ ,  $\pi(\tilde{U})$ , es un abierto).

Las herramientas geométrico-diferenciales que se utilizan para analizar la controlabilidad de un sistema mecánico son *el corchete de Lie* y el *producto simétrico* de dos campos vectoriales, definidos intrínsecamente<sup>9</sup> a partir de una conexión afín  $\nabla$ . En coordenadas locales estas operaciones se expresan:

$$\begin{aligned} [V, W] &= \sum_{j=1}^n [V, W]^j \frac{\partial}{\partial x^j}, & [V, W]^j &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial W^j}{\partial x^i} V^i - \frac{\partial V^j}{\partial x^i} W^i, \\ \langle V : W \rangle &= \sum_{j=1}^n \langle V : W \rangle^j \frac{\partial}{\partial x^j}, & \langle V : W \rangle^j &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial W^j}{\partial x^i} V^i + \frac{\partial V^j}{\partial x^i} W^i + 2 \sum_{i,\ell=1}^n \Gamma_{i\ell}^j V^i W^\ell, \end{aligned}$$

donde  $V = \sum_j V^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ ,  $W = \sum_j W^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ . A partir de estas operaciones, un conjunto de campos vectoriales  $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_m\}$  define la distribución generada por  $\mathcal{V}$  y sus corchetes de Lie sucesivos  $[V_i, V_j]$ ,  $[V_i, [V_j, V_k]]$ ,  $[[V_i, V_j], [V_k, V_l]], \dots$ ,  $i, j, k, l \in \{1, \dots, m\}$ . Esta distribución es la *clausura involutiva* de  $\mathcal{V}$  denotada por  $\overline{\text{Lie}}(V_1, \dots, V_m)$ . De forma análoga la *clausura simétrica*,  $\overline{\text{Sym}}(V_1, \dots, V_m)$ , es la distribución generada por  $\mathcal{V}$  y los productos simétricos sucesivos  $\langle V_i : V_j \rangle$ ,  $\langle \langle V_i : V_j \rangle : V_k \rangle, \dots$ ,  $i, j, k \in \{1, \dots, m\}$ .

Dentro de la clase de sistemas no lineales, el problema de la controlabilidad local fue estudiado en primer lugar para los sistemas *lineales en los inputs*:

$$\dot{x} = u_1 g_1(x) + \dots + u_m g_m(x), \quad x(0) = x_0, \quad (3)$$

<sup>9</sup>Es decir, una definición independiente de las coordenadas.

tales que  $g_i \in C^\omega(\mathbb{TQ})$ ,  $1 \leq i \leq m$ <sup>10</sup>. En ausencia de deriva, accesibilidad local es equivalente a controlabilidad local, y las condiciones necesarias y suficientes para éstas propiedades vienen dadas por el Teorema de Chow [30].

**Teorema 4.2 (Teorema de Chow)** El sistema de control (3) es localmente controlable en  $x_0$  si y sólo si  $\dim \overline{\text{Lie}}(g_1, \dots, g_m)(x_0) = \dim \mathbb{Q}$ .

La condición dada por el teorema de Chow no caracteriza la controlabilidad de los sistemas no lineales con deriva no nula. Fue Sussmann [36] quien aportó una condición suficiente para la controlabilidad, basada en los siguientes supuestos:

1.  $\dim \overline{\text{Lie}}(f, g_1, \dots, g_m)(x_0) = \dim \mathbb{Q}$ . Esta condición es equivalente a accesibilidad local en  $x_0$ ;
2. todo corchete de Lie *malo* ha de poder cancelarse mediante una combinación lineal de corchetes de Lie *buenos*.

En lugar de detallar este teorema, damos aquí la versión para sistemas mecánicos con simetría, para lo que necesitamos la definición de producto simétrico reducido *bueno* y *malo*. Un producto simétrico se dice *malo* cuando cada campo vectorial que lo define aparece un número par de veces. Por ejemplo,  $\langle Y_1 : Y_1 \rangle$  es malo y también  $\langle\langle Y_1 : Y_2 \rangle : \langle Y_2 : Y_1 \rangle\rangle$ . En caso contrario, el producto simétrico se dice *bueno*. Por ejemplo,  $\langle Y_1 : \langle Y_2 : Y_2 \rangle \rangle$  ó  $\langle Y_1 : Y_2 \rangle$ .<sup>11</sup> El *orden* de un producto simétrico es el número de campos vectoriales que lo definen. Así,  $\langle Y_1 : Y_1 \rangle$  tiene orden 2, y  $\langle Y_1 : \langle Y_2 : Y_2 \rangle \rangle$  tiene orden 3, etc. Intuitivamente, tenemos controlabilidad cuando podemos eliminar el efecto negativo de los productos simétricos *malos*, que fuerzan el movimiento del sistema en una dirección predeterminada.

Los campos vectoriales de control de un sistema mecánico con simetría pueden expresarse de la forma:

$$Y_i(g, r) = \Psi_{g*} B_i(e, r), \quad Y_i \in \mathbb{TQ}, \quad B_i \in \mathbb{TQ}/\mathbb{G}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

donde  $B_i$  es la “versión reducida” del campo vectorial  $Y_i$  en el espacio cociente  $\mathbb{TQ}/\mathbb{G}$ . Por otro lado, las operaciones del corchete de Lie y el producto simétrico pueden definirse a partir de la acción de grupo  $\Psi$ , de los campos vectoriales reducidos, y de las operaciones análogas reducidas  $\langle \cdot : \cdot \rangle_{\mathbb{TQ}/\mathbb{G}}$ ,  $[\cdot, \cdot]_{\mathbb{TQ}/\mathbb{G}}$ . Si  $V(g, r) = \Psi_{g*} A(e, r)$  y  $W(g, r) = \Psi_{g*} B(e, r)$ , entonces se tiene:

$$\langle V : W \rangle = \Psi_{g*} \langle A : B \rangle_{\mathbb{TQ}/\mathbb{G}}, \quad [V, W] = \Psi_{g*} [A, B]_{\mathbb{TQ}/\mathbb{G}}.$$

<sup>10</sup>En este caso, los campos vectoriales son funciones analíticas.

<sup>11</sup>La noción de corchete de Lie *bueno* y *malo* dada por Sussmann es diferente aunque relacionada con esta noción para productos simétricos.

La ventaja de las operaciones reducidas es que pueden computarse de forma más simplificada que las ordinarias. En caso que  $\mathbf{Q} = \mathbf{G}$ , obtenemos operaciones puramente algebraicas, mientras que las originales requieren siempre diferenciación. La definición precisa de las operaciones puede encontrarse en [10]. El siguiente test de controlabilidad lo expresamos en términos de las operaciones reducidas.

**Teorema 4.3** Sea  $(\mathbf{G} \times \mathbf{M}, \mathbb{M}, \mathcal{D}, \mathcal{F})$  un sistema mecánico con simetría. Dada una configuración inicial  $q_0 = (g_0, r_0) \in \mathbf{G} \times \mathbf{M}$  se tiene que:

- el sistema es localmente accesible en las variables de grupo en  $g \cdot q_0$ ,  $g \in \mathbf{G}$ , si  $\tau_* \overline{\text{Lie}}(\overline{\text{Sym}}(B_1, \dots, B_m))_{(e, r_0)} = \mathfrak{g}$ ;
- el sistema es localmente controlable en las variables de grupo en  $g \cdot q_0$ ,  $g \in \mathbf{G}$ , si  $\tau_* \overline{\text{Sym}}(B_1, \dots, B_m)_{(e, r_0)} = \mathfrak{g}$  y todo producto simétrico malo es una combinación lineal de productos simétricos buenos de menor orden.

Aquí,  $e \in \mathbf{G}$  es el elemento neutro del grupo de Lie,  $\mathfrak{g} = \mathbb{T}_e \mathbf{G}$  es el álgebra de Lie asociada a  $\mathbf{G}$  y  $\{B_1, \dots, B_m\}$  es la expresión reducida de una base de campos vectoriales asociados a  $\mathcal{F}$ . La aplicación  $\tau_* : \mathbb{T}\mathbf{Q}/\mathbf{G} \rightarrow \mathfrak{g}$  es la inducida por  $\pi_* : \mathbb{T}\mathbf{Q} \rightarrow \mathbb{T}\mathbf{G}$ .

**Observaciones 4.4** 1. Sustituyendo  $\overline{\text{Lie}}(\overline{\text{Sym}}(B_1, \dots, B_m))$  y la clausura simétrica  $\overline{\text{Sym}}(B_1, \dots, B_m)$  en el resultado anterior por otros espacios análogos, podemos extender el teorema para sistemas de control con simetría con energía potencial no nula  $V \neq 0$  y fuerzas de disipación isotrópicas. Ver [7, 20].

2. Observar que mientras la controlabilidad está garantizada si hay suficientes productos simétricos de los inputs, la accesibilidad local (propiedad menos fuerte) es todavía posible si podemos completar el conjunto de productos simétricos, insuficiente para generar toda el álgebra de Lie, con corchetes de Lie.

**Ejemplo 4.5 (Dirigible II)** El sistema de control del dirigible es un sistema mecánico infractuado con simetría que es localmente accesible, pero no localmente controlable en las configuraciones. Sin embargo, este sistema es todavía localmente controlable en las variables de grupo para todo  $q_0 \in \text{SE}(2) \times \mathbb{S}^1$ . Es decir, podemos controlar el sistema en su posición y orientación,  $(x, y, \theta)$ , pero no en las variables  $(x, y, \theta)$  y  $\gamma$  simultáneamente (ver [23] para un estudio detallado).

## 5. Primitivas que definen movimientos globales

En un sistema mecánico completamente actuado podemos cancelar directamente todos los efectos dinámicos del sistema en cada uno de los grados de libertad mediante los campos vectoriales de control. Sin embargo, cuando los son sistemas infractuados esta estrategia falla, pues no disponemos de “suficientes fuerzas” como para cancelar la deriva del sistema totalmente. Muy al contrario, en lo que sigue mostramos métodos alternativos que, en vez de tratar de eliminar la deriva, hacen uso de los efectos dinámicos a nuestro favor. Para ello una herramienta fundamental son los desarrollos en serie.

Los desarrollos en serie se utilizan en la Teoría de los Sistemas Dinámicos para encontrar descripciones de las trayectorias de los sistemas descritos por ecuaciones diferenciales. Algunas referencias son [21], donde se obtienen desarrollos para ecuaciones diferenciales ordinarias definidas sobre un grupo de Lie y [15, 18, 30, 32, 37], donde se derivan desarrollos para sistemas de control no lineales. En nuestro caso, nos gustaría especializar los desarrollos en serie para sistemas mecánicos simples en los que sea posible identificar aquellos objetos (los corchetes de Lie y productos simétricos de los campos vectoriales de control) relevantes para la controlabilidad. El objetivo es determinar el esfuerzo necesario para alcanzar la velocidad y/o configuración necesaria. En lo que sigue, indicamos cómo utilizar esta idea para, utilizando distintos tipos de esfuerzos oscilatorios, obtener “primitivas del movimiento”. Por una primitiva del movimiento entendemos un movimiento local básico que, combinado con otros, nos permite producir planes globales del sistema.

Los desarrollos en serie juegan por tanto el papel de aplicación input-output (cf. Sección 2) que nos gustaría invertir para poder diseñar algoritmos de planificación de movimientos y seguimiento de trayectorias.

### 5.1. Oscilaciones de amplitud pequeña

Supongamos por simplicidad que nuestro sistema  $(\mathbb{Q}, \mathbb{M}, \mathcal{D}, \mathcal{F})$ , posee energía potencial y fuerzas de disipación nulas, de manera que podemos describirlo por:

$$\nabla_{\dot{q}} \dot{q} = \sum_{k=1}^m u_k(t) Y_k(q) = Y(q, t), \quad (4)$$

donde  $Y(q, t)$  es una combinación lineal de nuestros campos vectoriales de control afectados por ciertos inputs; i.e.  $Y(q, t) \in \text{comb.lineal}(Y_1, \dots, Y_m)$ .

Se tiene que las *velocidades* de una trayectoria de (4) con condición inicial  $(q(0), \dot{q}(0))$

$= (q_0, 0)$  están descritas por el desarrollo en serie:

$$\dot{q}(t) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} V_{\ell}(q, t), \quad q(0) = q_0, \quad (5)$$

donde los campos vectoriales  $V_{\ell}$ ,  $\ell \in \mathbb{N}$ , se definen mediante integrales de productos simétricos anidados de los inputs. Más concretamente:

$$V_1(q, t) = \int_0^t Y(q, s) ds,$$

$$V_{\ell}(q, t) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\ell-1} \int_0^t \langle V_j(q, s) : V_{\ell-j}(q, s) \rangle ds, \quad \ell \geq 2.$$

La convergencia de la serie en (5) es absoluta y uniforme en un entorno pequeño de  $q_0$  y para  $t \leq T_s$  con  $T_s$  suficientemente pequeño. Este resultado se basa en técnicas geométrico-diferenciales, de análisis complejo y de las llamadas “funciones generadoras”; ver [4, 23]. La descripción (5) confirma así cómo los productos simétricos de los inputs afectan a las soluciones del sistema. La condición suficiente de controlabilidad toma pues pleno sentido, pues cuanto “mayor” sea el espacio generado por los campos de control y sus productos simétricos, mejor podremos controlar las velocidades  $\dot{q}(t)$ .

Podemos utilizar ahora esta información para obtener primitivas del movimiento. Tomando  $0 < \epsilon < 1$  suficientemente pequeño, podemos definir los campos vectoriales de control como una suma de dos contribuciones de primer y segundo orden en  $\epsilon$ :

$$Y(\epsilon, q, t) = \sum_{k=1}^m (\epsilon u_k^1(t) + \epsilon^2 u_k^2(t)) Y_k$$

$$= \epsilon \left( \sum_{k=1}^m u_k^1(t) Y_k(q) \right) + \epsilon^2 \left( \sum_{k=1}^m u_k^2(t) Y_k(q) \right) = \epsilon Y^1(q, t) + \epsilon^2 Y^2(q, t).$$

Si denotamos la integral definida de una función  $h(s)$  como  $\bar{h}(t) \triangleq \int_0^t h(\tau) d\tau$ , entonces los primeros términos del desarrollo en serie nos dan la evolución

$$\dot{q}(t) = \epsilon \bar{Y}^1(q(t), t) + \epsilon^2 \left( Y^2 - \frac{1}{2} \langle \bar{Y}^1 : \bar{Y}^1 \rangle \right) (q(t), t) + O(\epsilon^3), \quad (6)$$

donde la integral definida se toma con respecto al segundo argumento  $t$  de los campos vectoriales (es decir  $q(t)$  se deja fijo) y  $O(\epsilon^3)$  engloba los términos de orden en  $\epsilon^3$  y superior. Observamos que cuanto más pequeño sea  $\epsilon$ , más precisa será la descripción de las trayectorias.

Si ignoramos los términos de orden en  $\epsilon^3$  y superior, podemos tratar de invertir la aplicación input-output dada por (6). Esto puede garantizarse mediante una hipótesis

de controlabilidad local y tomando inputs periódicos de media cero de primer orden en  $\epsilon$ . Es decir, el conjunto de campos vectoriales de control  $\{Y_1, \dots, Y_m\}$  ha de satisfacer:

$$\text{rango } \{Y_i, \langle Y_j : Y_k \rangle\} = n = \dim \mathbf{Q}, \quad \langle Y_i : Y_i \rangle \in \text{comb.lineal}(Y_1, \dots, Y_m), \quad (7)$$

y además  $\bar{Y}^{-1}(q(T), T) = 0$  al cabo de cierto tiempo  $T$ <sup>12</sup>. El algoritmo de inversión produce así los inputs que generan una velocidad deseada  $\epsilon v_d$  al cabo de un tiempo  $T$ :

$$(Y^1, Y^2) = \text{Inverse}(v_d), \quad v(T) \approx \epsilon v_d,$$

ignorando los efectos de tercer orden en  $\epsilon$ . Bajo condiciones análogas de controlabilidad en las variables de grupo de un sistema con simetría se puede definir un procedimiento de inversión similar [23]. Estos resultados pueden extenderse también al caso de sistemas mecánicos con ciertos tipos de fuerzas de disipación no nulas [8].

Es fácil imaginar ahora que, con la ayuda del algoritmo de inversión, podremos obtener primitivas del movimiento para cambiar y mantener la velocidad del sistema tras intervalos periódicos de tiempo de primer orden en  $\epsilon$ . Es decir, se pueden encontrar inputs tales que:

**Cambiar-Vel**( $\epsilon, v_{\text{final}}$ ) ..... cambia la velocidad  $\dot{q}(t)$  a  $\epsilon v_{\text{final}}$

Estado inicial:  $\dot{q}(0) = \epsilon v_0,$

↓

Estado final:  $\dot{q}(T) = \epsilon v_{\text{final}}$

**Mantener-Vel**( $\epsilon, v_{\text{ref}}$ ) ..... mantiene la velocidad  $\dot{q}(t)$  en  $\epsilon v_{\text{ref}}$

Estado inicial:  $\dot{q}(0) = \epsilon v_{\text{ref}},$

↓

Estado final:  $\dot{q}(T) = \epsilon v_{\text{ref}}$

Una composición adecuada de estas primitivas, junto con la información que podemos deducir sobre la evolución aproximada de las configuraciones utilizando (5), nos permite producir planes del movimiento sencillos para nuestros sistemas mecánicos. Así, tenemos por ejemplo:

- **Reconfiguración punto a punto.** Mediante este algoritmo básico podemos reconfigurar el sistema desde cierto  $(q_0, 0)$  hasta una configuración final dada  $(q_f, 0)$ . La Figura 7 de la izquierda muestra la aplicación de la versión de este algoritmo para sistemas controlables en las variables de grupo con productos simétricos

---

<sup>12</sup>Esta propiedad se consigue tomando inputs  $u_k^1(t)$  y  $u_k^2(t)$  sinusoidales adecuados.

de segundo orden; tal es el caso del dirigible del Ejemplo 3.2. En particular, el sistema se reconfigura desde  $(0, 0, 0)$  hasta  $(2, 0, \pi)$ . El inicio y final de la aplicación de una primitiva se muestra mediante una nueva elipse que representa la posición del dirigible. Dependiendo de la configuración inicial y final, el algoritmo determina la velocidad nominal,  $v_{\text{nom}}$ , que ha de alcanzarse tras aplicar **Cambiar-Vel** $(\epsilon, v_{\text{nom}})$ . Entonces esta velocidad se mantiene un número de veces adecuado con **Mantener-Vel** $(\epsilon, v_{\text{nom}})$  hasta llegar a una configuración cercana a  $q_f$ , cuando se vuelve a aplicar **Cambiar-Vel** $(\epsilon, 0)$ .

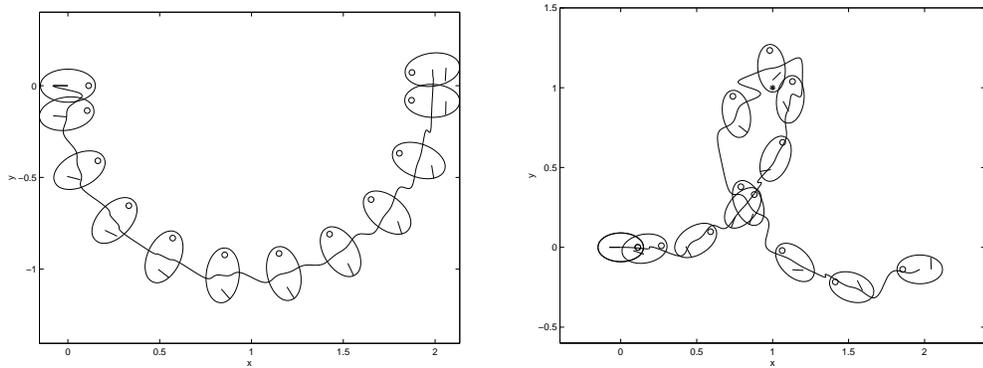


Figura 7: Reconfiguración punto a punto e interpolación estática. El círculo en la elipse indica cómo la orientación del sistema cambia con cada primitiva y, de la misma manera, el segmento indica el cambio de orientación de la fuerza de empuje.

- Estabilización a un punto.** Después de cada primitiva se puede aplicar un feedback discreto para corregir la velocidad y disminuir así los errores acumulados al concatenar éstas. En cualquier caso, los términos de orden superior que ignoramos hacen que el algoritmo anterior no coloque exactamente al sistema en la posición final deseada  $(q_f, 0)$ . Para solucionar esto se pueden aplicar consecutivamente dos primitivas que cambian la velocidad del sistema y lo estabilizan exponencialmente a la configuración final [23].
- Interpolación estática.** En la planificación de movimientos de un sistema puede interesarnos hacer pasar el sistema robótico por un conjunto de configuraciones intermedias  $(q_0, q_1, \dots, q_M)$  (sin detenerse en ellas) para evitar ciertos obstáculos. Un algoritmo que realiza esto es el descrito en el Cuadro 1. La versión para sistemas controlables en las variables de grupo está implementada en el sistema del dirigible en la Figura 7 (derecha). En este caso las configuraciones son  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 1, \pi/2)$  y  $(2, 0, \pi)$ .

Estos algoritmos fueron implementados con éxito en el sistema del dirigible del GRASP Lab de la Universidad de Pennsylvania. Referimos al lector a [40] para una descripción

<b>Objetivo:</b>	conducir el sistema por $\{(g_0, r_0), (g_1, r_1), \dots, (g_p, r_p)\}$ .
<b>Argumentos:</b>	$(g_0, r_0, g_1, r_1, \dots, g_p, r_p, \sigma)$
<b>Requiere:</b>	$(g(0), r(0), \xi(0), v(0)) = (g_0, r_0, 0_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathfrak{T}\mathfrak{M}})$ , $\log(g_i^{-1}g_{i+1})$ bien definido y $r_{i+1} \in \text{dom}(\phi_{r_i})$ , $i \in \{1, \dots, M\}$ .
<b>para <math>j = 1</math> hasta <math>p</math> hacer:</b>	
	$g_{\text{tmp},j} = g(t) \exp(\pi\xi(t))$
	$r_{\text{tmp},j} = r(t) + \pi v(t)$
	$N_j = \lceil \ \log(g_{\text{tmp},j}^{-1}g_j)\  / (2\pi\sigma) \rceil$
	$\xi_{\text{nom},j} = \log(g_{\text{tmp},j}^{-1}g_j) / (2\pi\sigma N_j)$
	$v_{\text{nom},j} = (r_j - r_{\text{tmp},j}) / (2\pi\sigma N_j)$
	<b>Cambiar-Vel</b> $(\sigma, (\xi_{\text{nom},j}, v_{\text{nom},j}))$
	<b>para <math>k = 1</math> hasta <math>(N_j - 1)</math> hacer:</b>
	<b>Mantener-Vel</b> $(\sigma, (\xi_{\text{nom},j}, v_{\text{nom},j}))$
	<b>terminar recursión</b>
	<b>terminar recursión</b>
	<b>Cambiar-Vel</b> $(\sigma, (0_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathfrak{T}\mathfrak{M}}))$

Cuadro 1: Descripción del algoritmo de interpolación estática

del experimento.

## 5.2. Oscilaciones de frecuencia y amplitud grandes

Los tipos de esfuerzos descritos en la sección anterior transmiten velocidades pequeñas a nuestros sistemas facilitando su controlabilidad. Podríamos preguntarnos ahora por el efecto que producen inputs de naturaleza contraria y si éste es de alguna utilidad. Para explorar esto, consideremos sistemas  $(\mathbb{Q}, \mathbb{M}, \mathcal{D}, \mathcal{F})$  tales que:

$$\nabla_{\dot{q}} \dot{q} = \sum_k \frac{1}{\epsilon} u_k \left( \frac{t}{\epsilon}, t \right) Y_k(q),$$

con  $\epsilon > 0$  un parámetro pequeño que hace más grande la amplitud de las funciones  $u_k(\tau, t)$ ,  $k \in \{1, \dots, m\}$ , que a su vez dependen de dos escalas temporales: una “rápida”,  $\tau = t/\epsilon$ , y otra “lenta”  $t$ . Utilizando una hipótesis de controlabilidad como en la sección anterior, podemos realizar un *seguimiento de trayectorias* en las configuraciones *en media*. La clave nos la da de nuevo un desarrollo en serie que esta vez obtenemos mediante el teorema del promediado.

Más concretamente, la combinación de la teoría clásica de promediado de primer orden con la teoría del *cálculo cronológico* [1] nos conduce a la siguiente descripción de la evolución de  $q(t)$  y  $\dot{q}(t)$ . Se tiene que [5, 24]  $q(t) = r(t) + O(\epsilon)$ , en una escala temporal  $t = O(1)$ , y que

$$\dot{q}(t) = \dot{r}(t) + \sum_{i=1}^m \eta_i(t) Y_i(r(t)) + O(\epsilon),$$

para ciertas funciones  $\eta_i(t)$ , que dependen de los controles  $u_k(\tau, t)$ ,  $k \in \{1, \dots, m\}$ , y de sus promedios  $\int u_k(\tau, t) d\tau$ ,  $k \in \{1, \dots, m\}$ . Por otro lado, mediante una hipótesis de controlabilidad como en (7) podemos expresar el sistema en la variable  $r$  de la forma:

$$\nabla_r \dot{r} = \sum_{i=1}^m z_i(t) Y_i(r) + \sum_{j < k} z_{jk}(t) \langle Y_j : Y_k \rangle(r),$$

donde las nuevas funciones de control  $z_i(t)$  y  $z_{jk}(t)$ ,  $i, j, k \in \{1, \dots, m\}$ , dependen básicamente de las integrales de los inputs  $\int u_k(\tau, t) d\tau$ ,  $k \in \{1, \dots, m\}$ .

La introducción de dos escalas temporales nos permite por tanto conseguir que el sistema promediado en la variable  $r$  esté completamente actuado (por  $\{Y_i, \langle Y_j : Y_k \rangle \mid i, j, k \in \{1, \dots, n\}\}$ ) bajo la hipótesis (7) y así podemos controlar  $q(t)$  en media. Es decir, dada una trayectoria deseada en las configuraciones  $q_d(t)$  podemos encontrar los inputs  $z_i(t)$ ,  $z_{jk}(t)$ , tales que  $r(t)$  es exactamente  $q_d(t)$ . Por el teorema de promediado sabemos entonces que  $q(t)$  será como  $q_d(t)$  en una escala temporal  $O(1)$  salvo errores de  $O(\epsilon)$ . Más aún, bajo ciertas condiciones podemos asegurar un seguimiento de  $q_d(t)$  durante una escala de tiempo mayor [24, 34]. Este resultado puede extenderse a la clase general de sistemas mecánicos introducida en la Sección 3.

**Ejemplo 5.1** Mostramos el funcionamiento de la ley de control anterior en el modelo de una avioneta (ver la Figura 8) que modelamos como un cuerpo rígido plano sobre el que actúa una fuerza vertical hacia abajo representando la gravedad. El espacio de configuraciones está dado por  $\text{SE}(2)$  y una configuración  $(x, z, \theta)$  representa la posición del centro de masas y orientación de una de las alas con la horizontal. Las fuerzas de control constan de una perpendicular  $f_1$  al cuerpo del avión compensando la gravedad y un par de fuerzas acopladas  $f_2$  en las alas para cambiar la orientación del sistema. Las ecuaciones del sistema son:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x \cos \theta - v_z \sin \theta, & \dot{v}_x &= (-k_1/m)v_x - g \sin \theta + v_z \omega + (1/m)f_1, \\ \dot{z} &= v_x \sin \theta + v_z \cos \theta, & \dot{v}_z &= (-k_2/m)v_z - g(\cos \theta - 1) - v_x \omega + (1/m)f_2, \\ \dot{\theta} &= \omega, & \dot{\omega} &= (-k_3/m)\omega + (h/J)f_2. \end{aligned}$$

Aquí,  $h$  es la distancia del centro de masas al extremo del ala,  $m$  y  $J$  son la masa y momento de inercia, respectivamente. En este caso no hay ligaduras en las velocidades del sistema y tenemos un término de disipación descrito por los coeficientes  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ .

En la gráfica de la Figura 8 (derecha) podemos ver el resultado del seguimiento de una trayectoria en  $(x(t), z(t), \theta(t))$  tras aplicar el esfuerzo descrito arriba con los valores  $m = 20$ ,  $J = 10$ ,  $h = 5$ ,  $k_1 = 12$ ,  $k_2 = 11$ ,  $k_3 = 10$ . Vemos aquí que el sistema oscila alrededor de la trayectoria deseada para distintos  $\epsilon = 0.1, 0.05, 0.01$  y que el error decrece de acuerdo con el teorema de promediado. Para otros ejemplos ver [5, 24, 25].

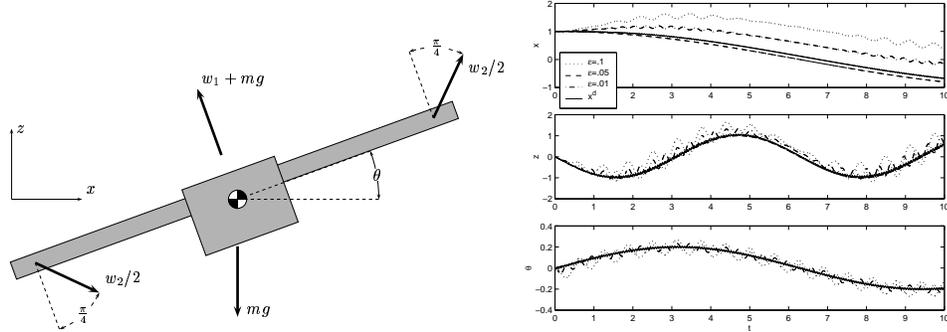


Figura 8: Modelo de una avioneta y comparación de trayectorias

### 5.3. Oscilaciones (subóptimas) de magnitud intermedia

En las secciones anteriores hemos visto cómo distintos esfuerzos oscilatorios sirven para planificar el movimiento de los sistemas mecánicos de control que hemos definido. Debido a las características especiales de los inputs y de la clase de sistemas, hemos podido realizar un análisis exhaustivo de las trayectorias y diseñar un esfuerzo preciso. Sin embargo, la aplicabilidad del espectro de esfuerzos cubierto es limitada y, en algunos casos, podría convenir utilizar una oscilación con un orden de magnitud ni muy pequeño ni muy grande. Precisamente, un problema para el que no se han desarrollado soluciones es el obtener numéricamente primitivas del movimiento utilizando la información geométrica disponible mediante el análisis de controlabilidad. El trabajo que resumimos a continuación es un intento por explotar esta vía con aplicación en el robot anguila REEL [9]. A diferencia de las dos aproximaciones anteriores, prestaremos atención al desarrollo movimientos *óptimos*. Más información sobre el tratamiento geométrico de los problemas de control óptimo puede encontrarse en [11, 14].

Como se decía en la Sección 2, un sistema mecánico de control puede expresarse por

$$\dot{z} = f(z) + B(z)u, \quad (8)$$

con  $z = (q, \dot{q})$ . Tras considerar la simetría del sistema, podemos reescribir las ecuaciones en términos de  $\dot{z} = (g^{-1}\dot{g}, \dot{p}, \ddot{r})$ , donde  $p$  es el momento del sistema y  $(g, r)$  son las variables de grupo y de forma [3]<sup>13</sup>. Debido al acoplamiento que es posible observar en las ecuaciones entre  $g^{-1}\dot{g}$  y  $\ddot{r}$  a través de  $\dot{p}$ , se puede deducir mediante herramientas pertenecientes al ámbito de la geometría diferencial<sup>14</sup>, que un movimiento cíclico en las variables de forma  $r(t)$  produce un desplazamiento neto en las variables de grupo  $g(t)$ .

<sup>13</sup>El término  $g^{-1}\dot{g}$  es la velocidad reducida en  $T_eG$  y por eso necesitamos más variables, las dadas por  $p$ , para completar nuestro sistema de ecuaciones.

<sup>14</sup>como la llamada *conexión mecánica* [2].

Por ejemplo, en la anguila robótica esto se traduce en que actuando de manera periódica las articulaciones (es decir, generando una onda viajera a lo largo de la anguila), podemos conseguir un desplazamiento neto de la misma en el espacio.

Siguiendo esta idea, se pueden definir primitivas del movimiento para una subclase de sistemas mecánicos con simetría. En particular, para anguila robótica se han podido encontrar los inputs que generan los movimientos básicos de *moverse hacia delante*, *rotar alrededor de la posición inicial* y *moverse de manera paralela*. Por otro lado, entre todos los controles que alcanzan estos objetivos, es lógico querer seleccionar aquellos que suponen un menor gasto energético. Es decir, si

$$\mathcal{J}(u) = \sum_{i=1}^m \int_0^T u_i^2(t) dt, \quad (9)$$

representa la “cantidad de energía consumida” por el sistema tras aplicar ciertos inputs  $u$  en un tiempo  $T$ , entonces queremos resolver el siguiente problema de control óptimo.

**OCP I.** Sean  $z_0$  y  $z_f$  estados iniciales y finales para el sistema (8). Determinar los inputs de control  $u_*(t)$  que generan una trayectoria  $z_*(t)$  de (8) tal que  $z(0) = z_0$ ,  $z(T) = z_f$ , y que minimizan el funcional (9).

En lugar de resolver este problema directamente, se pueden buscar soluciones *subóptimas* que aproximan las de **OCP I**. Ya que  $\mathcal{J}(u)$  se corresponde con la norma de  $u$  en  $L_2([0, T]; \mathbb{R}^m)$ , podemos reformular nuestro problema en términos de una base ortonormal  $\{\mathbf{e}_i(t)\}_{i=1}^\infty$  de  $L_2([0, T]; \mathbb{R}^m)$ . Es decir, utilizando que para cada  $u \in L_2([0, T]; \mathbb{R}^m)$  existe un único elemento  $(\alpha_i)_{i=1}^\infty \in l_2$  tal que  $u = \sum_{i=1}^\infty \alpha_i \mathbf{e}_i$ , el problema **OCP I** puede reescribirse como sigue:

**OCP II.** Sean  $z_0$  y  $z_f$  estados inicial y final, y las ecuaciones

$$\dot{z} = f(z) + B(z)u, \quad u(t) = \sum_{i=1}^\infty \alpha_i \mathbf{e}_i(t),$$

determinar  $\alpha \in l_2$  de coste mínimo,  $\mathcal{J}(\alpha) = \sum_{i=1}^\infty \alpha_i^2 = \|\alpha\|^2$ , tal que la solución de la ecuación desde  $z_0$  alcanza  $z_f$  al cabo de tiempo  $T$ .

Por el teorema de aproximación de Riesz, se puede tratar de aproximar numéricamente las soluciones del truncamiento de **OCP II** a los primeros  $N$  elementos de la base de  $L_2([0, T], \mathbb{R}^m)$ . A partir de aquí, podemos definir un algoritmo numérico para aproximar las soluciones del problema truncado basándonos en ideas de programación cuadrática y en el método de Newton-Raphson. Como candidatos para la condición inicial, tenemos las secuencias de inputs correspondientes a una primitiva del movimiento y obtenida mediante un análisis geométrico previo.

En el ejemplo de la anguila, la base que se toma es la dada por  $\{\sin nt, \cos nt\}_{n=1}^{\infty}$ , donde los modos que juegan un papel predominante son los que corresponden a los primeros elementos de esta base. Como condiciones iniciales, tomamos los inputs que generan cada una de las primitivas del movimiento mencionadas antes. Las Figuras 9 y 10 muestran algunas de las simulaciones obtenidas así y comparadas con los movimientos que resultan de aplicar en la plataforma robótica los inputs correspondientes.

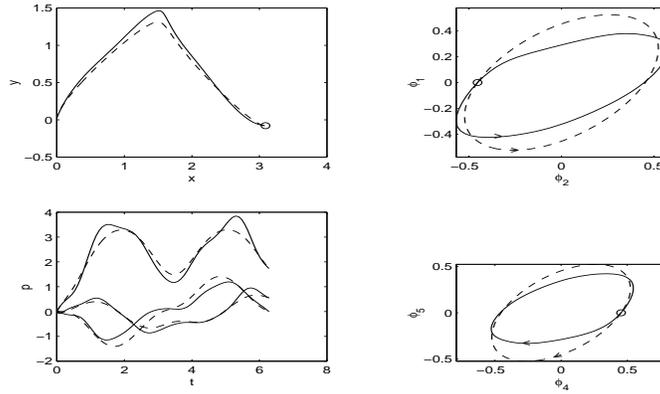


Figura 9: Comparación entre una onda viajera (a trazos) y la solución subóptima (línea sólida) del movimiento hacia delante de la anguila generando momento. Los costes son respectivamente  $\mathcal{J} = 3.45$   $\mathcal{J} = 2.9$ . En este caso no se aprecia mucha diferencia entre los dos tipos de solución. En el gait de giro sin embargo se aprecia una mejora mucho más sustancial [9].

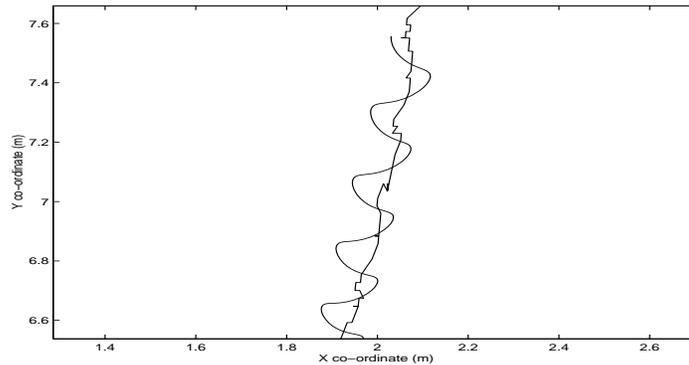


Figura 10: Comparación de la onda viajera de la Figura 9 con datos experimentales. En este caso el resultado experimental está de acuerdo con el esperado de la simulación. Sin embargo, el modelo todavía tendría que mejorarse para incluir los efectos de inercia del agua cuando la anguila gira [9].

## 6. Conclusiones

Este artículo muestra como ciertas herramientas matemáticas del ámbito de la Geometría Diferencial y del Análisis Matemático pueden resultar muy útiles en el campo de la Teoría de Control y de la Robótica. Aunque la clase de sistemas que hemos incluido aquí modelan un conjunto amplio de vehículos autónomos y sistemas robóticos, ésta no cubre la totalidad de los sistemas no lineales con deriva no nula, para los que permanecen muchas cuestiones abiertas. Otros esfuerzos no descritos aquí desde la Geometría Diferencial para el tratamiento de los sistemas de control no lineales incluyen la *platitude diferencial* o “differential flatness” [16] y el *control basado en la pasividad* [32, 38]. Ver también el tratamiento introductorio de [17, 30] y [5] para profundizar más en la Teoría Geométrica del Control. Por otro lado, la investigación actual en este campo se orienta hacia el análisis y modelado de sistemas más complejos que pueden requerir descripciones con PDEs (robots voladores, o a pequeña escala) o con “sistemas híbridos” descritos por varios sistemas de ecuaciones diferenciales que rigen la evolución del mecanismo en intervalos de tiempo distintos (robots con patas, coordinación de redes de sistemas) [6, 33, 35]. Otras áreas en las que es posible y necesaria una colaboración interdisciplinar entre ingenieros y matemáticos se describen en [28].

## Reconocimientos

Este trabajo fue financiado en parte por los proyectos PGC2000-2191-E, BFM2001-2272 y por la beca FPI asociada al proyecto PB97-1257. Este trabajo no habría sido posible sin la colaboración de Francesco Bullo, Jorge Cortés y Andrew Lewis. Agradezco las sugerencias realizadas por el revisor de este artículo, que han ayudado a mejorar sustancialmente la presentación del mismo.

## Referencias

- [1] A. A. Agrachev and R. V. Gamkrelidze. The exponential representation of flows and the chronological calculus. *Math. USSR Sbornik*, 35(6):727–785, 1978.
- [2] A. M. Bloch, P. S. Krishnaprasad, J. E. Marsden, and R. M. Murray. Nonholonomic mechanical systems with symmetry. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 136(1):21–99, 1996.
- [3] A. M. Bloch, P. S. Krishnaprasad, J. E. Marsden, and T. S. Ratiu. Dissipation induced instabilities. *Annales de l’Institut Henri Poincaré analyse non lineaire*, 11(1):37–90, 1994.

- [4] F. Bullo. Series expansions for the evolution of mechanical control systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 40(1):166–190, 2001.
- [5] F. Bullo and A. D. Lewis. *Geometric Control of Mechanical Systems*, volume 49 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer Verlag, New York, 2004.
- [6] C. Chevallereau, G. Abba, Y. Aoustin, F. Plestan, E.R. Westervelt, C. Canudas de Wit, and J.W. Grizzle. RABBIT: A testbed for advanced control theory. *IEEE Control Systems Magazine*, 23(5):57–79, 2003.
- [7] J. Cortés, S. Martínez, and F. Bullo. On nonlinear controllability and series expansions for Lagrangian systems with dissipative forces. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(8):1396–1401, 2002.
- [8] J. Cortés, S. Martínez, and F. Bullo. On nonlinear controllability and series expansions for Lagrangian systems with dissipative forces. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(8):1396–1401, 2002.
- [9] J. Cortés, S. Martínez, J. P. Ostrowski, and K. A. McIsaac. Optimal gaits for dynamic robotic locomotion. *International Journal of Robotics Research*, 20(9):707–728, 2001.
- [10] J. Cortés, S. Martínez, J. P. Ostrowski, and H. Zhang. Simple mechanical control systems with constraints and symmetry. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 41(3):851–874, 2002.
- [11] M de León, J. Cortés, D. Martín de Diego, and S. Martínez. General symmetries in optimal control. *Reports on Mathematical Physics*, 53(1):55–78, 2004.
- [12] M. de León and P.R. Rodrigues. *Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics*. Mathematics Studies. North-Holland, first edition, 1989.
- [13] G. Dullerud and F. Paganini. *A course in robust control theory. A convex approach*, volume 36 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, 1st edition, 2000.
- [14] A. Echeverría-Enríquez, J. Marín-Solano, M.C. Muñoz-Lecanda, and N. Román-Roy. Geometric reduction in optimal control theory with symmetries. *Reports on Mathematical Physics*, 52(1):89–113, 2003.
- [15] M. Fliess. A note on Volterra series expansions for nonlinear differential systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25(1):116–7, 1980.
- [16] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, and P. Rouchon. Flatness and defect of non-linear systems: Introductory theory and examples. *International Journal of Control*, 61(6):1327–1361, 1995.
- [17] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer Verlag, New York, third edition, 1995.

- [18] M. Kawski. Calculating the logarithm of the chen flies series. *International Journal of Control*, 2000. A short version appeared in the *Proc. Mathematical Theory of Networks and Systems*, June 2000.
- [19] A. D. Lewis. Simple mechanical control systems with constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(8):1420–1436, 2000.
- [20] A. D. Lewis and R. M. Murray. Configuration controllability of simple mechanical control systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 35(3):766–790, 1997.
- [21] W. Magnus. On the exponential solution of differential equations for a linear operator. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, VII:649–673, 1954.
- [22] S. Martínez. *Geometric Methods in Nonlinear Control Theory with Applications to Dynamic Robotic Systems*. PhD thesis, University Carlos III, Madrid, Spain, 2002.
- [23] S. Martínez and J. Cortés. Motion control algorithms for simple mechanical systems with symmetry. *Acta Applicandae Mathematicae*, 76(3):221–264, 2003.
- [24] S. Martínez, J. Cortés, and F. Bullo. Analysis and design of oscillatory control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(7):1164–1177, 2003.
- [25] S. Martínez, J. Cortés, and F. Bullo. Motion planning and control problems for underactuated robots. In A. Bicchi, H. Christensen, and D. Prattichizzo, editors, *Control Problems in Robotics*, volume 4 of *Springer Tracts in Advanced Robotics*, pages 59–74. Springer Verlag, New York, 2003.
- [26] Math Alive website. [www.math.princeton.edu/matalive/Geometry/index.html](http://www.math.princeton.edu/matalive/Geometry/index.html).
- [27] K.A. McIsaac. *A hierarchical approach to motion planning with applications to an underwater eel-like robot*. PhD thesis, University of Pennsylvania, 2001.
- [28] R. M. Murray, editor. *Control in an Information Rich World*. SIAM, Philadelphia, 2003. Report of the Panel on Future Directions in Control, Dynamics and Systems.
- [29] Nasa rover website. <http://marsrovers.jpl.nasa.gov>.
- [30] H. Nijmeijer and A. J. van der Schaft. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer Verlag, New York, 1990.
- [31] W. Muñoz Oliva. *Geometric Mechanics*. Springer-Verlag, 2002.
- [32] R. Ortega, A. Loria, P. J. Nicklasson, and H. Sira-Ramirez. *Passivity-Based Control of Euler-Lagrange Systems: Mechanical, Electrical and Electromechanical Applications*. Communications and Control Engineering. Springer Verlag, New York, 1998.

- [33] J. Radford. *Symmetry, Reduction and Swimming in a Perfect Fluid*. PhD thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California, USA, August 2003.
- [34] J. A. Sanders and F. Verhulst. *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*. Springer Verlag, New York, 1985.
- [35] L. Schenato. *Analysis and Control of Flapping Flight: from Biological to Robotic Insects*. PhD thesis, University of California at Berkeley, 2003.
- [36] H. J. Sussmann. A sufficient condition for local controllability. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 16(5):790–802, 1978.
- [37] H. J. Sussmann. A product expansion of the Chen series. In C. I. Byrnes and A. Lindquist, editors, *Theory and Applications of Nonlinear Control Systems*, pages 323–335. Elsevier, Oxford, UK, 1986.
- [38] A. J. van der Schaft. *L2-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*, volume 218 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer Verlag, New York, 1996.
- [39] F. W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, volume 94 of *GTM*. Springer Verlag, New York, second edition, 1989.
- [40] H. Zhang and J. P. Ostrowski. Visual servoing with dynamics: control of an unmanned blimp. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 618–623, Detroit, MI, May 1999.